SAMARQAND AGROINNOVATSIYALAR VA TADQIQOTLAR INSTITUTI

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA BUXGALTERIYA HISOBI KAFEDRASI

“AMALIY MATEMATIKA 1, 2”

FANIDAN AMALIY MASHG‘ULOT ISHLANMASI

Mavzu: “Taqsimot parametrlarini statistik baholari”

SAMARQAND-2024

Tuzuvchi:

Y.X.Xamroyev-“Raqamli texnologiyalar va buxgalteriya hisobi” kafedrasi o‘qituvchisi

Taqrizchilar:
1.X.Qarshiboyev- SamISI “Oliy matematika” kafedrasi mudiri, f-m.f.n, dotsent
2. M.Mavlyanov - SamDVMCHBU Axborot texnologiyalari kafedrasi katta o’qituvchisi

12-mavzu. Taqsimot parametrlarini statistik baholari

Reja:

Reja:

9.1. Bosh to’plam dispersiyasi ma’lum bo’ganda bosh to’plam o’rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish
9.2. Bosh to’plam dispersiyasi noma’Itim bo’lganda bosh to’plam o’rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish
9.4. Ikki bosh to’plam dispersiyasi haqidagi gipotezani tekshirish
9.5. Bosh to’plamlar dispersiyalari ma’lum bo’lgan holda bosh to’plamlar o’rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish
9.6. Bosh to’plamlar dispersiyasilari noma’lum bo’lgan holda bosh to’plamlar o’rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish
9.7. Bosh to’plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani tekshirish

Tayanch iboralar:boshlang‘ich funksiya,aniqmas integral,aniq integral, bevosita, o‘zgaruvchilarni almashtirish va bo‘laklab integrallash.

Mavzu: Taqsimot parametrlarini statistik baholari

Amaliy mashg‘ulot texnologiyasi

Vaqti – 80 minut	O‘quvchilar soni: 23 nafar
O‘quv mashg‘ulotining shakli	Amaliy (Misol, masalalar yechishga o‘rgatish)
Mashg‘ulotning rejasi	9.1. Bosh to’plam dispersiyasi ma’lum bo’ganda bosh to’plam o’rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish 9.2. Bosh to’plam dispersiyasi noma’Itim bo’lganda bosh to’plam o’rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish 9.4. Ikki bosh to’plam dispersiyasi haqidagi gipotezani tekshirish 9.5. Bosh to’plamlar dispersiyalari ma’lum bo’lgan holda bosh to’plamlar o’rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish

O‘quv mashg‘ulotining maqsadi: a) ta’limiy- Funksiyadan integral olishni bilish. Integrallar jadvalidan foydalanib misollarga qo‘llay olish.
b) tarbiyaviy - o‘quvchilarning kasbiy bilimlari – *ta’lim* sohasiga tegishli bilimlardan foydalanib, o‘rganilayotgan mavzuga qiziqish o‘yg‘otish, matematikaning hayotdagi, kasblardagi o‘rnini ko‘rsatish orqali ularni mehnatsevarlikka, diqqatni jamlashga, fikrlashga o‘rgatish, matematik tafakkurni shaklantirish.
v) rivojlantiruvchi - taqqoslash, umumlashtirish, xulosa chiqarish usullarini qo‘llash ko‘nikmasini shakllantirish;

Tayanch so‘z va iboralar	boshlang‘ich funksiya,aniqmas integral,aniq integral, bevosita, o‘zgaruvchilarni almashtirish va bo‘laklab integrallash.

Pedagogik vazifalar: - Boshlang‘ich funksiya, aniqmas integral va aniq integral. haqida ma’lumot berish; - Aniqmas integral jadvalidan foydalanishni bilish; - Nyuton-Leybnis formulasidan foydalana olish; - Formulalarni misollar ishlashda qo‘llashni bilish;	**O‘quv faoliyatining natijalari:** **O‘quvchi**: - Boshlang‘ich funksiya, aniqmas integral va aniq integrallar haqida gapirib beradi; - Aniqmas integral jadvalidagi formulalarini qo‘llay oladi. -Formulalardan misollar ishlashda foydalana oladi;
O‘qitish uslubi va texnikasi	Kichik guruhlarda ishlash, modelli o‘qitish usuli, klaster, test.
O‘qitish vositalari	Ma’ruzalar matni, rangli plakatlar, mavzu bo‘yicha tarqatma materiallar.
O‘qitish shakllari	*Mustaqil ish, guruhlarda ishlash, jamoada ishlash.
O‘qitish sharoitlari	Guruhdagi ishlarni tashkillashtirish uchun muvofiqlashgan texnik uskunalar bilan jihozlangan auditoriya.
O‘quvchilarning berilgan o‘quv mashg‘ulotlari uchun kerakli bilim va ta’lim mahoratlari ro‘yxati.	

Amaliy mashg‘ulotning texnologik xaritasi

Bosqichlar vaqti	**Faoliyat mazmuni**	
	O‘qituvchi	**O‘quvchi**
1-bosqich **Kirish** **(10 min)**	1.1.O‘tilgan mavzular bo‘yicha tarqatma materiallar tarqatiladi. 1.2. O‘quv mashg‘ulotining mavzu va rejasini ma’lum qiladi. Erishadigan natijalar bilan tanishtiradi. Mazkur mashg‘ulot muammoli tarzda o‘tishini e’lon qiladi.	1.1. Eshitadilar va yozib oladilar.

2-bosqich **Asosiy** **(55 min)**	2.1. O‘quvchilar e’tiborini rejadagi savollar va ulardagi tushunchalarga qaratadilar. Kichik guruhlarga bo‘linadi. 2.2. Muammoli savollarni o‘rtaga tashlaydi va ularni birgalikda o‘qishga chorlaydi 2.3. Mavzuni mustahkamlash uchun klaster tuzushadi. 2.4. Mavzuga doir misollar ishlashadi. 1.Integrallash usullari: bevosita, o‘zgaruvchilarni almashtirish va bo‘laklab integrallash. 2. Irratsional ifodalar va trigonometrik funksiyalarni integrallash. 3. Nyuton- Leybnis formulasi. Aniq integrallarni hisoblash usullari. 2.5.Mustaqil ishlash uchun misollar beriladi.	2.1. O‘quvchilar javob beradilar, daftarlariga chizadilar, jadvalnning 1 va 2 ustunlarini to‘ldiradilar. 2.2. Muammoga e’tiborni qaratadilar va yozib oladilar. 2.3. Yozib oladilar va o‘z bilimlari bilan solishtiradilar. 2.4. Muammo yuzasidan o‘z yechimlarini taklif qiladilar. Munozara qiladilar. Javob beradilar. 2.5. Optimal yechimlar yuzasidan takliflar beradilar.
3-bosqich **Yakuniy** **(15 min)**	3.1. Mavzuga xulosa qiladi. 3.2. Rejadagi natijaga erishishda faol ishtirokchilarni rag‘batlantiradi. 3.3. Mustaqil ish uchun vazifa beradi: «Integral hisob asoslari» mavzusini o‘rganish. 3.4. Uyda vazifa uchun misollar beriladi.	3.1. Eshitadilar. Yozib oladilar. 3.2.Yozib oladilar va uyda ishlaydilar.

9.1. Bosh to’plam dispersiyasi ma’lum bo’ganda bosh to’plam o’rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish

9.1-misol. Pomidor ko’chatlarining bo’yi o’rtachasi μ = 43 *sm* va dispersiyasi s^2 = 9 ga teng bo’lgan normal taqsimotga ega. 15 dona ko’chatlar o’tkazilishi kerak bo’lgan tuproqqa o’g’itlar normadan ikki barobar ko’proq solindi. Bu ko’chatlarning o’rtacha bo’yi 46 *sm*ga yetdi. Normadan ziyod solingan o’g’itlar foyda bermadi degan xulosa chiqarishimizga asos bormi?

Yechish: Masalani yechishda bir yoqlama testdan foydalanamiz: $H_0 : \mu = 43 sm, \quad H_1 : \mu > 43 sm$. (ya’ni tanlanma o’rtachasi 43 smdan ortiq bo’lgan bosh to’plam dan olingan.)

Ishonchlilik darajasini α=0,01 ga teng deb olamiz. Qo’yidagi ifodaning qiymatini hisoblaymiz:

$Z = \dfrac{\bar{x} - a_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{46 - 43}{3/\sqrt{15}} = \sqrt{15} = 3{,}87.$ Laplasning integral funktsiyasi $\Phi(x)$ qiymatlari jadvalidan $2\Phi(Z_{krit}) = 1 - 2\alpha$ tenglikni, ya'ni $\Phi(Z_{krit}) = 0{,}49$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_{krit} aniqlaymiz: Z_{krit} =2,33.

$Z_{krit} < Z$ tengsizlik o'rinli bo'lgani tufayli nolinchi gipoteza H_0 inkor etiladi va alternativ gipoteza H_1 qabul qilinadi. Xulosa qilib aytganda, 99% ishonch bilan tanlanma o'rtachasi 43 smdan ziyod bo'lgan bosh to'plamdan olingan deb ta'kidlashimiz mumkin, ya'ni o'g'itlarning ikki barobar ko'p solinganligi yaxshi natija bergan.

9.2-misol. Ipni g'altakka o'rab beruvchi uskuna tekshirilmoqda. O'ramlarning o'rtacha soni 500 ga teng bo'lishi kerak. G'altaklar partiyasidan olingan tanlanma o'ramlarning o'rtacha soni 502,5 ga teng ekanligini ko'rsatdi. Uskuna to'g'ri sozlanganmi, degan savolga javob bering. (Ishonchlilik darajasi α= 0,05).

9.3-misol. O'rtacha kvadratik chetlashishi s = 2.1 ga teng bo'lgan normal bosh to'plamdan hajmi n=49 ga teng tanlanma olindi. Tanlanmaning o'rtachasi $\bar{x}_t = 4{,}5$ ga teng ekan. Ishonchlilikdarajasi 0,05 teng bo'lsa, quyidagi nolinchi gipotezani tekshiring: H_0: $\mu=3$ va altirnativ gipoteza H_1: $\mu \neq 3$.

9.2. Bosh to'plam dispersiyasi noma'Itim bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish

9.4-misol. "NUR" firmasi elektr chiroqlari ishlab chiqaradi. Ma'lum bir turdagi chiroqlar uchun o'zining normativ xizmat muddati (resursi) belgilangan. Bu resurs 1500 soatga teng. Yangi ishlab chiqarilgan chiroqlar partiyasini tekshiruvdan o'tkazish uchun n=10 dona chiroq tanlanibdi. Bu tanlanma uchun o'rtacha xizmat muddati $\bar{x}_t$=1410 soatni va o'rtacha kvadratik ("tuzatilgan") chetlashishi esa s=90 soatni tashkil etadi. Olingan ma'lumotlar ishlab chiqarilayotgan chiroqlarning xizmat muddati normativ xizmat muddatidan farqlanadi degan xulosa chiqarishimizga asos bo'la oladimi?

Yechish: Nolinchi gipoteza sifatida tanlanma o'rtachasi 1500 soatga teng bo'lgan bosh to'plamdan olingan degan taxmin olamiz. Alternativ gipoteza - tanlanma o'rtachasi 1500 soatga teng bo'lgan bosh to'plamdan olinmagan degan taxmin, ya'ni

$$H_0 : \mu = 1500 \ (soat),$$
$$H_1 : \mu \neq 1500 \ (soat).$$

Gipotezalarning aniqlanishigako'raikki yoqlamatest tekshiriladi.

$\bar{s} = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}} \cdot s$ ekanligini hisobga olib, T statistikaning qiymatini hisoblaymiz:

$$T = \frac{\bar{x}_t - a_0}{\bar{s}/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x}_t - a_0}{s/\sqrt{n-1}} = \frac{1410-1500}{90/\sqrt{9}} = \frac{-90}{90} \cdot \sqrt{9} = -3.$$

Styudent taqsimotining kritik qiymatlari jadvalidan $T_{krit} = t(\alpha; n - 1) = t(0.1; 9) = 1.83$ ekanligini aniqlaymiz.

$T < -T_{krit}$ tengsizlik bajarilgani uchun nolinchi gipoteza inkor etilib alternativ gipoteza qabul qilinadi.

Xulosa: Chiroqlarning o'rtacha resursi o'zgargan va normativ xizmat muddatini qanoatlantirmaydi.

9.5-misol. Fabrikada kofeni 100 *g* idishlarga qadoqlash uchun avtomat uskunadan foydalaniladi. Agar qadoqlanayotgan idishlarning o'rtacha og'irligi aniq og'irlikdan farq qilsa, uskuna sozlanadi. Vaqti-vaqti bilan qadoqlangan kofe idishlari ajratib olinadi va ularning o'rtacha og'irligi va og'irlik chetlashishi hisoblanadi. 30 dona qadoqlangan kofe idishlari og'irligini tahlil qilish natijasida ularning o'rtacha og'irligi $\bar{x}_t = 102,4$ va "tuzatilgan" o'rtacha kvadratik chetlashishi $s = 18,540$ ekanligi aniqlandi. Avtomat uskunani sozlash zaruriyati bormi? (Ishonchlilik darajasi $\alpha = 0,05$).

9.6-misol. Bosh normal to'plam dan olingan hajmi $n = 16$ ga teng bo'lgan tanlanma uchun uning o'rtachasi $\bar{x}_t = 12,4$ va "tuzatilgan" o'rtacha kvadratik chetlashishi s=1,2 topildi. Ishonchlilik darajasi 0,05 bo'lganda H_0: μ=11,8 nolinchi gipotezani H_1: $\mu \neq 11,8$ alternativ gipoteza bo'lganda tekshiring.

9.4. Ikki bosh to'plam dispersiyasi haqidagi gipotezani tekshirish

9.7-misol. Investitsion kompaniya xizmatchisi ikkita *A* va *B* investitsiya loy-ihalarini tahlil qilmoqda. *A* investitsiya 10 yil muddatga mo'ljallangan bo'lib, undan bu vaqt davomida yiliga 17,8% foyda kutilmoqda. *B* investitsiya 8 yil muddatga mo'ljallangan bo'lib, undan yiliga 17,8% foyda kutilmoqda. Bu ikki investitsiyalardan tushadigan yillik foydaning ("tuzatilgan") dispersiyalari 3,21 va 7,14 ga teng. *A* va *B* investitsiyalarning muvaffaqiyatli bo'lmaslik xavfi barobar emas degan xulosaga asos bormi? (Investitsiyalardan tushadigan yillik foyda normal taqsimlangan deb faraz qilinadi.)

Yechish: Biz bu ikki investitsiyalardan tushadigan yillik foydalardan iborat ikki tanlanmaning bir xil dispersiyaga ega ikki normal bosh to'plamdan olinganligini tekshirmoqchimiz, shuning uchun:

$$H_0 : s_A^2 = s_B^2,$$
$$H_1 : s_A^2 \neq s_B^2.$$

10% ishonch bilan ikki yoqlama F test tekshiramiz. Tanlanmalarning dispersiyalari qiymatini aniqlaymiz:

$$\bar{s}_A^2 = \frac{n_A}{n_A - 1} \cdot s_A^2 = \frac{10}{9} \cdot 3{,}21^2 = 11{,}449,$$

$$\bar{s}_B^2 = \frac{n_B}{n_B - 1} \cdot s_B^2 = \frac{8}{7} \cdot 7{,}14^2 = 58{,}2624.$$

F statistikaning qiymatini hisoblaymiz. $\bar{s}_B^2 > \bar{s}_A^2$ bo'lgani uchun:

$$F = \frac{katta\ dispersiya}{kichik\ dispersiya} = \frac{\bar{s}_B^2}{\bar{s}_A^2} = \frac{58{,}2624}{11{,}449} = 5{,}09$$

Fisher kritiriyasi jadvalidan F uchun kritik qiymat aniqlanadi:

$$F_{krit} = F(\alpha/2; n_A - 1; n_B - 1) = F(0{,}05;9;7) = 3{,}29\,.$$

$F_{krit} < F$ tengsizlik o'rinli bo'lganligi uchun nolinchi gipoteza H_0 inkor etiladi, alternativ gipoteza H_1 qabul qilinadi.

Xulosa: A va B investitsiyalarning muvaffaqiyatli bo'lmaslik xavfi barobar emas degan taxminga asos bor.

9.8-misol. Investitsion kompaniya xizmatchisi ikkita A va B investitsiya loyihalarini tahlil qilmoqda. A investitsiya 15 yil muddatga mo'ljallangan bo'lib, undan bu vaqt davomida yiliga 15,6% foyda kutilmoqda. B investitsiya 12 yil muddatga mo'ljallangan bo'lib, undan yiliga 15,6% foyda kutilmoqda. Bu ikki investitsiyalardan tushadigan yillik foydan ing ("tuzatilgan") dispersiyalari 4,6 va 3,42 ga teng. A va B investitsiyalaming muvaffaqiyatli boMmaslik xavfi (risk) barobar emas degan xulosaga asos bormi? Investitsiyalardan tushadigan yillik foyda normal taqsimlangan deb faraz qilinadi.

9.9-misol. X va Y ikki bosh to 'plamdan 10 va 16 hajmdagi ikkita tanlanma olindi va ularning "tuzatilgan" dispersiyalari hisoblanib 3.6 va 2.4 ga tengligi aniqlandi. Ishonchlilik darajasi α= 0,05 bo'lganda bosh to'plamlar dispersiyasi tengligi haqidagi nolinchi $H_0 : s_A^2 = s_B^2$ H gipotezani tekshiring. Alternativ gipotezani quyidagicha aniqlang: $H_1 : s_A^2 > s_B^2$.

9.5. Bosh to'plamlar dispersiyalari ma'lum bo'lgan holda bosh to'plamlar o'rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish

9.10-misol. Shakar ishlab chiqaruvchi korxona shakarni 1 *kg*dan qadoqlovchi ikkita uskunaga ega. Ko'p yillik kuzatishlar natijasida boshqaruvchi bu ikki uskuna uchun standart chetlashishi (bosh to'plamning o'rtacha kvadratik chetlashishi)ni baholagan: 1-uskuna uchun 0,02*kg* va 2-uskuna uchun 0,04 *kg*. Birinchi uskunada qadoqlangan n_1 = 10 qopcha tanlanib ulardagi shakaming o'rtacha massasi $\bar{x}_1$=1,018 *kg* ga tengligi topildi. Ikkinchi uskuna uchun xuddi shunday hajmi n_2=12 teng tanlanma olinib, o’rtacha massa $\bar{x}_2 = 0{,}989$ *kg* ekanligi aniqlandi. Bu ikki uskunada qadoqlanayotgan shakarning o’rtacha massalari xar xil deyishimizga asos bormi?

Yechish: Nolinchi gipoteza ikkala tanlanma bir xil o’rtachaga ega bo’lgan bosh to’plamlardan olingan degan taxmindan iborat

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2,$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

H_1 alternativ gipotezaning tanlab olinishiga ko’ra ikki yoqlama test tekshirishimiz kerak. Ishonchlilik darajasi 1% ga teng bo’lsin. Z statistikani hisoblaymiz:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2}}} = \frac{(1{,}018 - 0{,}989) - 0}{\sqrt{\frac{0{,}02^2}{10} + \frac{0{,}04^2}{12}}} = 2.197.$$

Laplasning integral funktsiyasi $\Phi(x)$ qiymatlari jadvalıidan $2\Phi(Z_{krit}) = 1 - \alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymatni aniqlaymiz: Z_{krit}=2,58.

$-Z_{krit} < Z < Z_{krit}$ tengsizlik o’rinli bo’lgani tufayli nolinchi gipoteza H_0 qabul qilinadi vaalternativ gipoteza H_1 inkor etiladi.

Xulosa: 99% ishonch bilan ta’kidlashimiz mumkinki ikki uskunada qadoqlanayotgan shakarning o’rtacha massalari bir xil.

9.11-misol. Fabrikada kofeni 100 *gr*, idishlarga qadoqlash uchun ikki avtomat uskunadan foydalaniladi. Ko‘p yillik kuzatishlar natijasida boshqaruvghi bu ikki uskuna uchun standart chetlashish (bosh to‘plamning o ‘rtacha kvadratik chetlashishi)ni baholagan: 1 -uskuna uchun 0,02*gr* va 2-uskuna uchun 0,04*gr*. Birinchi uskunada qadoqlangan n_1= 30 dona kofe idishi tanlanib ulardagi kofening o'rtacha massasi $\bar{x}_1$=101 gr. ga tengligi aniqlandi. Ikkinchi uskuna uchun xuddi shunday hajmi n_2=25 teng tanlanma olinib, o'rtacha massa $\bar{x}_2$ = 98gr. ekanligi aniqlandi. Bu ikki uskunada qadoqlanayotgan kofening o'rtacha massalari har xil deyishimizga asos bormi?

9.12-misol. X va Y ikki bosh to'plamdan 20 va 30 hajmdagi ikkita tanlanma olindi va ularning o'rtachalari hisoblandi: $\bar{x}_1$ = 154 va $\bar{x}_2$ = 149. Agar bosh to'plamlar dispersiyalari 120 va 100 ma’lum bo'lsa. Ishonchlilik darajasi α= 0,05 bo'lganda bosh to'plamlar o'rtachalari tengligi haqidagi nolinchi H_0: $\mu_X=\mu_Y$ gipotezani tekshiring. Alternativ gipotezani quyidagicha aniqlang: H_1: $\mu_X \neq \mu_Y$.

9.6. Bosh to’plamlar dispersiyasilari noma’lum bo’lgan holda bosh to’plamlar o’rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish

9.13-misol. Ishlab chiqarilayotgan sariyog'ning sifatini tekshirish maqsadida ishlab chiqarilgan ikki partiyaning har biridan 10 donadan olinib, har bir tanlanma uchun undagi suvning ulushi (%da) hisoblandi. Birinchi partiya uchun o'rtacha foiz $\bar{x}_1$ =68,2% va standart chetlashish $\bar{s}_1 = 0{,}70\%$, ikkinchi partiya uchun esa $\bar{x}_2 = 67{,}0\%$ va $\bar{s}_2$ =0,74% ga teng ekan. Bu ikki partiyadagi sariyog' har xil suv ulushiga ega degan taxminga asos bormi?

Yechish: *Nolinchi gipoteza:* bu ikki tanlanma o'rtachalari o'zaro teng bo'lgan ikki normal bosh to'plamdan olingan; $H_0 : \mu_1 = \mu_2,$
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$

Alternativ gipotezaning tanlab olinishiga ko'ra ikki yoqlama test tekshirishimiz kerak.

Bosh to'plamlar dispersiyalari no'malum bo'lgani uchun, bosh to'plamlar dispersiyalari tengligi haqidagi F testni tekshirishimiz kerak. Ya'ni gipotezalarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$H_0 : s_A^2 = s_B^2,$$
$$H_1 : s_A^2 \neq s_B^2.$$

5% ishonchlilik darajasi bilan ikki yoqlama test tekshiramiz. Tanlanmalar dispersiyalarini hisoblaymiz:

$$\bar{s}_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} \cdot s_1^2 = \frac{10}{9} \cdot 0{,}70^2 = 0{,}544; \qquad \bar{s}_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} \cdot s_2^2 = \frac{10}{9} \cdot 0{,}74^2 = 0{,}608$$

F statistikani aniqlaymiz. $\bar{s}_1^2 < \bar{s}_2^2$ bo'lgani uchun :

$$F = \frac{katta\ dispersiya}{kichik\ dispersiya} = \frac{\bar{s}_2^2}{\bar{s}_1^2} = \frac{0{,}608}{0{,}544} = 1{,}12.$$

Fisher taqsimotining kritik qiymatlari jadvalidan F uchun kritik qiymat aniqlanadi:

$$F_{krit} = F(\alpha / 2; n_1 - 1; n_2 - 1) = F(0{,}05;9;9) = 4.026.$$

$F_{krit} > F$ tengsizlik o'rinli bo'lganligi uchun nolinchi gipoteza H_0 qabul qilinadi vaalternativ gipoteza H_1 inkor etiladi.

5% ishonch bilan xulosa qilish mumkinki: dispersiyalar orasidagi farq ahamiyatga loyiq emas va bosh to'plamlar dispersiyalari o'zaro teng deb olish mumkin.

T statistikaning qiymatini hisoblaymiz:

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2)}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(68{,}2 - 67{,}0) - 0}{\sqrt{\frac{(10 \cdot 0{,}70^2 + 10 \cdot 0{,}74^2)}{10 + 10 - 2} \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)}} = 3{,}53.$$

Styudent taqsimotining kritik qiymatlari jadvalidan T uchun kritik qiymat aniqlanadi:

$$T_{krit} = t(\alpha / 2; n_1 + n_2 - 2) = t(0{,}025;18) = 2{,}10.$$

$T_{krit} < T$ tengsizlik o ‘rinli bo‘lganligi uchun nolinchi gipoteza H_0 inkor etilib, alternativ gi poteza H_1 qabul qilinadi.

Xulosa: Bu ikki partiyadagi sariyog‘ tarkibidagi suv ulushi har xil.

9.14-misol. Batareykalar ishlab chiqarish fabrikasida ikkita ishlab chiqarish konveyeri o'rnatilgan. Batareykalaning o'rtacha xizmat vaqtini aniqlash uchun har bir konveyerdan tanlanma olindi. Birinchi konveyerdan oling an 12 ta batareyka uchun o'rtacha xizmat vaqti 34,2 *soat* va s= 5,9 soat (“tuzatilgan” o'rtacha kvadratik chetlashish). Ikkinchi konveyerdan olingan 10 ta b atareyka uchun o'rtacha xizmat vaqti 287 soat va s = 6,1 soat. Har xil konveyerda ishlab chiq arilgan batareykalarning o'rtacha xizmat vaqti har xil deyishimizga asos bormi?

9.14-misol. X va Y ikki bosh to'plamdan 5 va 6 hajmdagi ikkita tanlanma olindi va ularning o'rtachalari: $\bar{x}$ =15,9, $\bar{y}$=14,1 va “tuzatilgan” o'rtacha kvadratik chetlashishlari mos ravishda 14,76 va 4,92 hisoblandi. Ishonchlilik darajasi α= 0,05 bo'lganda bosh to'plamlar o'rtachalari tengligi haqidagi nolinchi gipotezani tekshiring. Alternativ gipotezani bosh topplam o’rtachalari o’zaro farqli.

9.7. Bosh to’plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani tekshirish

9.15-misol. Quyidagi tanlanma berilgan:

Interval nomeri	Interval uzunligi		Chastota
i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	3	8	6
2	8	13	8
3	13	18	15
4	18	23	40
5	23	28	16
6	28	33	8
7	33	38	7
			$\sum n_i = 100$

χ^2-kriteriysidan foydalanib, α = 0,05 ishonchlilik darajasi bilan hajmi n=100 ga teng bo‘lgan tanlanma normal taqsimlangan bosh to'plamdan olinganligini tekshiring.

Yechish: Xususiy intervallaming o‘rtalarini topamiz: $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$. x_i^* variantaning chastotasi sifatida i - xususiy intervalga tushgan variantalar sonini olamiz va natijada quyidagi statistik taqsimot hosil qilamiz:

x_i^* 5,5 10,5 15,5 20,5 25,5 30,5 35,5

n_i 6 8 15 40 16 8 7

Bu statistik taqsimot uchun o'rtacha va o'rtacha kvadratik chetlashish qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\bar{x}^* = 20{,}7; \quad \bar{s}^* = 7{,}28.$$

X miqdorni standartlashtiramiz, ya’ni yangi Z o‘zgaruvchiga_ o‘tamiz $Z = \dfrac{X - \bar{x}^*}{\bar{s}^*}$ va interval chegaralarini aniqlaymiz:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}^*}{\bar{s}^*} \quad va \quad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}^*}{\bar{s}^*}.$$

$z_1 = -\infty \; va \; z_m = \infty$ deb qabul qilamiz.

So‘ngra $p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ tenglikdan foydalanib, X miqdor uchun $(x_i; x_{i+1})$ intervalga tushishining nazariy ehtimollarini hisoblaymiz. Eslatib o‘tamiz, bunda Φ(z) Laplasning integral funktsiyasi bo‘lib, uning qiymatlari jadvalida keltirilgan. Misol uchun:

$$p_1 = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - \bar{x}^*}{\bar{s}^*}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi(\infty) + \Phi\left(\frac{8 - 20{,}7}{7{,}28}\right) =$$

$$= 0{,}5 + \Phi(-1{,}74) = 0{,}5 - \Phi(1{,}74) = 0{,}5 - 0{,}4591 = 0{,}0409.$$

Xuddi shunday usulda qolgan nazariy ehtimolliklar hisoblanadi. Hisob natijalar yordamida quyidagi jadvalni to‘ldiramiz:

i	Interval chegaralari		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$
	z_i	z_{i+1}			
1	-∞	-1,74	-0,5	-0,4591	0.0409
2	-1,74	-1.06	-0,4591	-0,3554	0,1037
3	-1,06	-0,37	-0,3554	-0,1443	0,2111
4	-0,37	0,32	-0,1443	0,1255	0,2698
5	0,32	1,00	0,1255	0,3413	0,2158
6	1,00	1,69	0,3413	0,4545	0,1132
7	1,69	∞	0,4545	0,5	0,0455
					$\sum p_i = 1$

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\dfrac{n_i^2}{np_i}\right) - n$ statistikaning qiymatini hisoblash uchun quyidagi jadvalni to‘ldiramiz:

i	p_i	$np_i = 100 p_i$	n_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	0.0409	4,09	6	1,91	3,6481	0,8920
2	0,1037	10,37	8	-2,37	5,6169	0,5416
3	0,2111	21,11	15	-6,11	37,3321	1,7685
4	0,2698	26,98	40	13,02	169,5204	6,2832
5	0,2158	21,58	16	-5,58	31,1364	1,4428
6	0,1132	11,32	8	-3,32	11,0224	0,9737
7	0,0455	4,55	7	2,45	6,0025	1,3192
	$\sum p_i = 1$	$\sum n_i = 100$				$\chi^2 = 13$

Normal taqsimot ikkita (μ, s^2) parametrga ega bo‘lganligi uchun d = 2 va erkinlik darajasi $k = m - 1 - d = 7 - 1 - 2 = 4$. Ilovada keltirilgan χ^2 -taqsimotining kritik qiymatlari jadvalidan α = 0,05 va erkinlik darajasi k = 4 ga mos kelgan kritik qiymatni aniqlaymiz $\chi^2_{\alpha;k} = \chi^2_{0,05;4} = 7{,}8$.

$\chi^2 > \chi^2_{\alpha;k}$ tengsizlik o'rinli bo‘lgani uchun 95% ishonch bilan nolinchi gipoteza H_0 ni inkor etamiz.

Xulosa: Tanlanma bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani qanoatlantirmaydi.

9.15-misol. χ^2 -kriteriysidan foydalanib (α= 0,05) hajmi 100 ga teng quyida keltirilgan tanlanma bosh to'plamning normalligi haqidagi gipotezaga muvofiqmi?

Interval nomeri	Interval uzunligi		Chastota
i	x_i	x_{i+1}	n_{i}
1	-20	-10	4
2	-10	0	10
3	0	10	15
4	10	20	35
5	20	30	16
6	30	40	12
7	40	50	8
			$\sum n_i = 100$

Adabiyotlar:

1. A.S.Rasulova, G.M.Raimova, X.K.Sarimsakova. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. –T.: O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti. 2006.
2. Jay L. Devore, Kenneth N. Berk. Modern Mathematical Statistics with Applications (Second Edition).- Springer Science+Business Media, LLC 2012.
3. Larsen, Richard J. An introduction to mathematical statistics and its applications —5th ed. 2001 y.
4. В.Е.Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. –М.: ЮНИТИ, 2002 г.
5. A.K.Raximov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. – SamQXI, 2009 y.

4-*jadval*

Laplas integral funksiyasining qiymatlari

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.32	0.1255	0.64	0.2389	0,96	0.3315
0,01	0.0040	0.33	0,1293	0,65	0.2422	0.97	0,3340
0,02	0.0080	0,34	0.1331	0.66	0.2454	0,98	0,3365
0,03	0.0120	0,35	0,1368	0,67	0.2486	0.99	0,3389
0.04	0,0160	0,36	0,1406	0.68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0.37	0,1443	0,69	0.2549	1.01	0,3438
0,06	0.0239	0,38	0,1480	0.70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0.0279	0.39	0,1517	0,71	0,2611	1.03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0.41	0,1591	0,73	0,2673	1.05	0,3531
0,10	0.0398	0,42	0,1628	0,74	0,2704	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1.07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0.2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0.1736	0,77	0,2794	1,09	0.3621
0,14	0.0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0.0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0.58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0.3888
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0.60	0,2257	0,92	0,3212	1.24	0,3925
0,29	0.1141	0,61	0,2291	0.93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0.62	0,2324	0,94	0,3264	1.26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0.3980

$\Phi(-x)=-\Phi(x)$; $x>5$ lar ucl)(x) = 0,5.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,28	0.3997	1.61	0.4463	1.94	0,4738	2.54	0.4945
1.29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2.56	0,4948
1.30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2.58	0,4951
1,31	0.4049	1,64	0,4495	1.97	0,4756	2.60	0.4953
1.32	0.4066	1,65	0,4505	1,98	0.4761	2,62	0,4956
1.33	0.4082	1,66	0,4515	1.99	0,4767	2,64	0.4959
1.34	0,4099	1.67	0,4525	2,00	0.4772	2.66	0,4961
1.35	0,4115	1,68	0.4535	2.02	0,4783	2.68	0,4963
1.36	0,4131	1.69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1.37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0.4803	2,72	0,4967
1,38	0.4162	1,71	0,4564	2.08	0,4812	2.74	0.4969
1.39	0,4177	1.72	0,4573	2,10	0.4821	2,76	0,4971
1,40	0.4192	1,73	0.4582	2.12	0,4830	2.78	0,4973
1.41	0,4207	1.74	0,4591	2,14	0,4838	2.80	0,4974
1.42	0,4222	1.75	0.4599	2.16	0,4846	2.82	0,4976
1,43	0.4236	1,76	0,4608	2.18	0,4854	2,84	0,4977
1.44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2.86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2.22	0,4868	2.88	0,4980
1.46	0,4279	1.79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0.4641	2,26	0,4881	2.92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2.94	0,4984
1.49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2.96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0.4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0.4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3.20	0,49931
1.53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0.49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1.56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4.25	0,499989
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	4,50	0,499997
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938	4.75	0,499999
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941	5,00	0,500000

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$; $x > 5$ lar uchun: $\Phi(x) = 0,5$.

5-*jadval*

Styudent kriteriysining *t* qiymatlari $t_\gamma = t_\gamma = (\gamma, n)$

n \ γ	0,90	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,90	0,95	0,99	0,999
5	2,131	2,776	4,604	8,61	20	1,729	2,093	2,861	3,883
6	2,015	2,570	4,032	6,86	25	1,711	2,064	2,797	3,745
7	1,943	2,446	3,707	5,96	30	1,699	0,045	2,756	3,659
8	1,894	2,364	3,499	5,41	35	1,688	2,032	2,729	3,600
9	1,859	2,306	3,355	5,04	40	1,683	2,023	2,708	4,558
10	1,833	2,262	3,249	4,78	45	1,679	2,016	2,692	3,527
11	1,812	2,228	3,169	4,59	50	1,675	2,009	2,679	3,502
12	1,795	2,201	3,106	4,44	60	1,671	2,001	2,662	3,464
13	1,782	2,178	3,054	4,32	70	1,666	1,996	2,649	3,439
14	1,770	2,160	3,012	4,22	80	1,664	1,991	2,640	3,418
15	1,761	2,144	2,976	4,14	90	1,662	1,987	2,633	3,403
16	1,753	2,131	2,946	4,07	100	1,660	1,984	2,627	3,392
17	1,745	2,119	2,921	4,02	120	1,657	1,980	2,617	3,374
17	1,739	2,109	2,898	3,97	∞	1,645	1,960	2,576	3,291
19	1,734	2,101	2,878	3,92					

6-*jadval*

$q = q\ (\gamma, n)$ qiymatlari

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,221
17	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

7-jadval

Styudent taqsimotining kritik qiymatlari

Erkinlik darajasi k	Ishonchlik darajasi α (ikkiyoqlama test)					
	0,1	0.05	0.02	0.01	0.002	0,001
1	6.31	12.71	31.82	63.66	318.29	636.58
2	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.60
3	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6,87
6	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1,89	2.36	3.00	3,50	4.79	5,41
8	1.86	2.31	2,90	3,36	4.50	5,04
9	1,83	2.26	2.82	3.25	4,30	4,78
10	1.81	2,23	2,76	3.17	4.14	4,59
11	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.76	2.14	2.62	2.98	3,79	4.14
15	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.72	2.07	2.51	2.82	3.50	3.79
23	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.71	2,06	2,49	2.79	3.45	3.73
26	1.71	2.06	2.48	2.78	3.43	3,71
27	1.70	2.05	2.47	2,77	3.42	3,69
28	1.70	2.05	2.47	2.76	3,41	3.67
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3.40	3,66
30	1,70	2.04	2.46	2.75	3.39	3,65
40	1,68	2,02	2.42	2,70	3.31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3.16	3,37
∞	1,64	1.96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
	Ishonchlilik darajasi α iryoqlama test)					

266

8-jadval

Fisher taqsimotining kritik qiymatlari

(k_1 – katta dispersiyaning erkinlik darajasi)

(k_2 – kichik dispersiyaning erkinlik darajasi)

Ishonchlilik darajasi α=0.01												
	k_1											
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6107
2	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.41	99.42
3	34.12	30.82	29,46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27,34	27.23	27,13	27.05
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.45	14.37
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.96	9.89
6	13.75	10.92	9.78	9,15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7,87	7.79	7.72
7	12,25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4,85	4,77	4.71
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4,74	4.63	4.54	4.46	4.40
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4,50	4.39	4.30	4.22	4.16
13	9.07	6.70	5.74	5,21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4,00	3.89	3.80	3,73	3.67
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3,89	3.78	3.69	3.62	3.55
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3,68	3.59	3.52	3,46

Ishonchlilik darajasi α=0.05												
	k_1											
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19,38	19.40	19.40	19.41
3	10.13	9,55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8,79	8.76	8.74
4	7.71	6.94	6.59	6,39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4,10	4.06	4.03	4.00
7	5,59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57
8	5.32	4.46	4,07	3.84	3.69	3.58	3,50	3.44	3.39	3.35	3,31	3.28
9	5.12	4.26	3.86	3,63	3.48	3.37	3.29	3,23	3,18	3.14	3.10	3.07
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2,98	2,94	2.91
11	4.84	3.98	3.59	3,36	3.20	3.09	3.01	2,95	2,90	2.85	2.82	2.79
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2,75	2.72	2.69
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2,71	2.67	2.63	2.60
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2,65	2.60	2.57	2.53
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2,54	2.51	2.48
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2,85	2.74	2.66	2.59	2,54	2.49	2.46	2.42
17	4.45	3.59	3,20	2.96		2.70	2,61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38